Μαθηματική Επεξεργασία της Φθίνουσας Ταλάντωσης

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έκτελεί ένα σώμα αμείωτη Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση είναι :

$$\left[\begin{array}{c} \sum F = ma = -Dx \\ \\ a = \dfrac{d^2x}{dt^2} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt^2} + \frac{D}{m}x = 0 \tag{1}$$

και οι λύσεις της αμείωτης ΓΑΤ είναι:

$$\begin{gathered} x = x_0 \eta\mu(\omega_0 t + \phi) \\ v = \omega_0 x_0 \sigma\upsilon\nu(\omega_0 t + \phi) \\ a = -\omega_0^2 x_0 \eta\mu(\omega_0 t + \phi) \end{gathered} \tag{2}$$

Στην περίπτωση της φθίνουσας ταλάντωσης έχει προστεθεί και μία δύναμη απόσβεσης η οποία αντιστέκεται στην ταχύτητα του σώματος και έχει μέτρο ανάλογο της ταχύτητας $F_b = -bv$ όπου b η σταθερά της απόσβεσης. Η εξίσωση της ταλάντωσης θα είναι τώρα

$$\left[\begin{array}{c} \sum F = ma = -Dx - bv \\ \\ a = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \\ v = \dfrac{dx}{dt} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = 0 \tag{3}$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση :

$$x = x_0 e^{-\lambda t} \eta\mu(\omega t + \phi) \tag{4}$$

όπου x_0 το πλάτος της ταλάντωσης για $t = 0$, $\lambda = \dfrac{b}{2m}$ η σταθερά της εκθετικής πτώσης του πλάτους της ταλάντωσης, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης, και ω_0 η συχνότητα της αμείωτης ταλάντωσης αν δεν υπάρχει απόσβεση.

Από την προηγούμενη εξίσωση βλέπουμε ότι η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη από την αντίστοιχη της αμείωτης, και κατά συνέπεια η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης θα είναι μεγαλύτερη από την περίοδο της αμείωτης ταλάντωσης.

Ίσως ξενίσει σε πολλούς η παρουσίαση της εξίσωσης της ταλάντωσης μέσα από παραγώγους. Αυτό γίνεται γιατί θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις της αμείωτης ταλάντωσης δεν ισχύουν στην φθίνουσα. Από την 4 και τον ορισμό της ταχύτητας σαν την πρώτη παράγωγο της απομάκρυνσης ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\left[\begin{array}{c} x = x_0 e^{-\lambda t} \eta\mu(\omega t + \phi) \\ \\ v = \dfrac{dx}{dt} \end{array}\right] \Longleftrightarrow v = -\lambda x_0 e^{-\lambda t} \eta\mu(\omega t + \phi) + x_0 e^{-\lambda t} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi) \tag{5}$$

Από την 5 και τον ορισμό της επιτάχυνσης σαν την πρώτη παράγωγο της ταχύτητας ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\begin{bmatrix} v = -\lambda x_0 e^{-\lambda t}\eta\mu(\omega t+\phi) + x_0 e^{-\lambda t}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi) \\ \\ a = \dfrac{dw}{dt} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$a = x_0(\lambda^2-\omega^2)e^{-\lambda t}\eta\mu(\omega t+\phi) - 2\lambda x_0 e^{-\lambda t}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi) \qquad (6)$$

Αν συγκρίνουμε τις 2,5 και 6 βλέπουμε ότι στις φθίνουσες υπάρχει και ένας δεύτερος όρος που δεν υπάρχει στις αμείωτες.

$$\left[\begin{array}{c|c} x = x_0\eta\mu(\omega_) t+\phi) & x = x_0 e^{-\lambda t}\eta\mu(\omega t+\phi) \\ \\ v = \omega_0 x_0\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t+\phi) & v = -\lambda x_0 e^{-\lambda t}\eta\mu(\omega t+\phi) + x_0 e^{-\lambda t}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi) \\ \\ a = -\omega_0^2 x_0\eta\mu(\omega_0 t+\phi) & a = x_0(\lambda^2-\omega^2)e^{-\lambda t}\eta\mu(\omega t+\phi) - 2\lambda x_0 e^{-\lambda t}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi) \end{array}\right] \qquad (7)$$

Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση που θα μπορούσε να τεθεί σαν θέμα πολλαπλής επιλογής (στο Πρώτο Θέμα) η δικαιολόγησης (στο Δεύτερο Θέμα) σε Πανελλήνιες εξετάσεις είναι αν για $x = 0$ στην περίπτωση των φθίνουσων ταλαντώσεων η επιτάχυνση είναι 0 και αυτή. Ο στόχος του ερωτήματος αυτού είναι να μπερδέψει τους μαθητές καθώς στις αμείωτες ταλαντώσεις ισχύει $a = -omega^2 x$ κατά συνέπεια για $x = 0$ θα έχουμε και $a = 0$.

Στις φθίνουσες ταλαντώσεις θα έχουμε ότι $x = 0$ σημαίνει ότι και $\eta\mu(\omega_t+\phi) = 0$ άρα $\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t+\phi) = 1$. Κατά συνέπεια η 6 δίνει ότι $a = -2\lambda\omega x_0 e^{-\lambda t}$ το οποίο είναι **διάφορο του μηδενός**. Άρα η επιτάχυνση στις φθίνουσες ταλαντώσεις δεν μηδενίζεται ότα το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$).

Ο δεύτερος τρόπος για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα είναι να χρησιμοποιήσουμε την 3:

$$\begin{bmatrix} ma = -Dx - bv \\ \\ x = 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow a = \frac{-b}{m}v \qquad (8)$$

Όμως για $x = 0$ η ταχύτητα είναι μέγιστη άρα η επιτάχυνση είναι μη μηδενική.