3.1 Νόμος Μετατόπισης Wien

Όσο εκπληκτικό, παράδοξο και απίστευτο και αν ακούγεται το μέγιστο την αφετικής ικανότητας ενός μέλανος σώματος αν αυτό μελετηθεί ως προς τις συχνότητες είναι διαφορετικό από αυτό που βρίσκεται αν μελετηθεί ως προς τα μήκη κύματος

Ο αριθμός των φωτονίων με συχνότητες από f μέχρι $f + df$ είναι:

$$dN_f = \frac{8V\pi}{c^3}\frac{hf^3}{e^{hf/kT}-1}df \Longleftrightarrow \frac{dN_f}{df} = \frac{8V\pi}{c^3}\frac{hf^3}{e^{hf/kT}-1} \tag{3.1}$$

Αν η συνάρτηση αυτή πολλαπλασιασθεί με το hf παίρνουμε και την ενέργεια που εκπεμπεται σε αυτή την περιοχή των συχνοτήτων:

$$dE = \frac{8V\pi}{c^3}\frac{hf^3}{e^{hf/kT}-1}df \Longleftrightarrow \frac{dE}{df} = \frac{8V\pi}{c^3}\frac{hf^3}{e^{hf/kT}-1} \tag{3.2}$$

Για να βρούμε το μέγιστο αυτής της συνάρτησης μηδενίζουμε την πρώτη της παράγωγο ως προς τη συχνότητα:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{df}\dfrac{dE}{df} = \dfrac{d}{df}[\dfrac{8V\pi}{c^3}\dfrac{hf^3}{e^{hf/kT}-1}] = 0 \\ \\ \dfrac{d^2E}{df^2} = \dfrac{12\pi^2 f^2(e^{hf/kT}-1) - 8\pi^3 f^3 \frac{h}{2\pi kT}e^{hf/kT}}{(e^{hf/kT}-1)^2} = 0 \Longleftrightarrow \\ \\ (3 - \dfrac{hf}{kT})e^{hf/kT} = 3 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Και καταλήγουμε στην εξίσωση 3.3 του Δεύτερου Τόμου:

$$f_{max} = 2.822\frac{k}{h}T$$

Για να μελετήσουμε την ενέργεια ως προς το μήκος κύματος από τη 3.2 αντικαθιστούμε τις συχνότητες με τα

$$\begin{bmatrix} c = \lambda f \\ \\ \dfrac{dE}{df} = \dfrac{8V\pi}{c^3}\dfrac{hf^3}{e^{hf/kT}-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{dE}{d\lambda} = \frac{8V\pi}{c^3}\frac{16\pi^3c^2}{\lambda^5}\frac{h}{e^{hc/\lambda kT}-1} \tag{3.4}$$

Για να βρούμε το μέγιστο αυτής της συνάρτησης μηδενίζουμε την πρώτη της παράγωγο ως προς το μήκος κύματος:

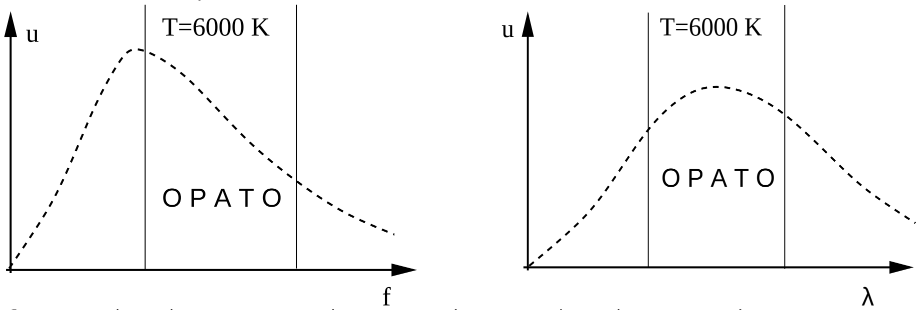
$$\frac{d}{d\lambda}\frac{dE}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}[\frac{8V\pi}{c^3}\frac{16\pi^3 c^2}{\lambda^5}\frac{h}{e^{hc/\lambda kT}-1}] = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\frac{d^2E}{d\lambda^2} = \frac{8V16\pi^3c^2\pi}{c^3}\frac{h(-5\lambda^4(e^{hc/\lambda kT}-1)+\lambda^5\frac{hc}{\lambda^2 kT}e^{hc/\lambda kT}}{\lambda^{10}(e^{hc/\lambda kT}-1)^2} = 0 \tag{3.5}$$

$$5\lambda e^{hc/\lambda kT} - \frac{hc}{kT}e^{hc/\lambda kT} = 5\lambda \tag{3.6}$$

Και καταλήγουμε στην εξίσωση 3.3 του Δεύτερου Τόμου:

$$\lambda_{max} = \frac{2899\times 10^{-6}}{T}$$

Είναι προφανές ότι οι εξισώσεις 3.3 και 3.5 είναι διαφορετικές. Επομένως οδηγούν και σε διαφορετικά μέγιστα.



Ο φυσικός λόγος για αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι η διαμέριση για τις συχνότητες και τα μήκη κύματος είναι διαφορετική, καθώς τα μεγέθη αυτά από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής είναι αντιστρόφως ανάλογα. Θα γίνει καλύτερα κατανοητό αν το όλο πρόβλημα μελετηθεί σαν ιστόγραμμα. Αν λοιπόν διαμερίσουμε την ενέργεια ως προς τη συχνότητα θεωρώντας ότι η ενέργεια μεταβάλλεται με άλματα σε κάθε αλλαγή της συχνότητας, τότε παρατηρούμε ότι επειδή η συχνότητα και το μήκος κύματος είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα η τιμή του πηλίκου της ενέργειας που περικλείουν τα φωτόνια με τις συγκεκριμένες συχνότητες προς τη μονάδα της συγκεκριμένης διαμέρισης ακολουθούν διαφορετική συμπεριφορά. Τα αντίστοιχα εμβαδά των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται είναι τα ίδια καθώς το ποσό της ενέργειας ανάμεσα σε αυτές τις συχνότητες είναι το ίδιο είτε αν ειδωθεί ως πος τις συχνότητες είτε ως προς τα μήκη κύματος. Επειδή όμως οι διαφορές Δf και $\Delta\lambda$ έχουν διαφορετική συμπεριφορά τα μέγιστα εμφανίζονται σε διαφορετικά σημεία.

Για όποιον ενδιαφέρεται για περισσότερο διάβασμα:

Mandl Στατιστική Φυσική Εκδόσεις Πνευματικός Κεφάλαιο 10 (για τη διαμέριση ως προς τις συχνότητες)

R.D. Reed and R.R. Roy Statistical Physics for Students of Science and Engineering, Dover (New York) σελ. 140. (για τη διαμέριση ως προς τα μήκη κύματος)