

ΛΥΣΗ

Από τις 2.22 και 1.79 έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{F} = -\vec{\nabla}V \\ \vec{\nabla}V = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} \\ V(r) = kr^n \end{array} \right] \iff$$

$$\vec{F} = -\hat{r}\frac{\partial kr^n}{\partial r} = -knr^{n-1}\hat{r}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία του προβλήματος για να απλοποιήσουμε την κλίση της δυναμικής ενέργειας. Το πρόβλημά μας είναι μόνο ακτινικό, επομένως οι συνιστώσες της κλίσης σε σχέση με τις γωνίες θ και ϕ μηδενίζονται. Επομένως σωστή απάντηση είναι η (β).



Ολική Ενέργεια Σωματιδίου

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από ένα σταθερό σημείο υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης μέτρου

Παράδειγμα 2.9

$F = \frac{k}{r^3}$, όπου $k > 0$. Αν η δυναμική ενέργεια

του σωματιδίου είναι μηδέν για $r \rightarrow \infty$, τότε η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

α) $-\frac{k}{r^2}$ β) $\frac{-k}{2r^2}$ γ) 0 δ) $\frac{k}{r^2}$

(ΑΣΕΠ 2005)

ΛΥΣΗ

Από τις 2.22, 1.79 καθώς και από το γεγονός πως η F είναι η κεντρομόλος έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{F} = -\vec{\nabla}V \\ \vec{\nabla}V = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} \\ F = \frac{k}{r^3} \\ F = \frac{mv^2}{r} \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k}{r^3} \\ K = \frac{mv^2}{2} = \frac{k}{2r^2} \end{array} \right] \iff \\
 \left[\begin{array}{l} V = -\int_r^\infty \frac{k}{r^3} dr \iff V = \frac{k}{2r^2} \Big|_r^\infty \stackrel{V=0, r \rightarrow \infty}{\iff} V = -\frac{k}{2r^2} \\ K = \frac{mv^2}{2} = \frac{k}{2r^2} \\ E = K + V = 0 \end{array} \right] \quad (2.26)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία του προβλήματος για να απλοποιήσουμε την κλίση της δυναμικής ενέργειας. Το πρόβλημά μας είναι μόνο ακτινικό, επομένως οι συνιστώσες της κλίσης σε σχέση με τις γωνίες θ και ϕ μηδενίζονται. Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής. Επομένως σωστή απάντηση είναι η (γ).



Παράδειγμα 2.10

Έργο Δύναμης

Σε ένα σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. Ποιο είναι το έργο της δύναμης αυτής, αν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά 5 m κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα των z και κατά 4 m κατά την αρνητική διεύθυνση του άξονα των y ;

ΛΥΣΗ

Η μετατόπιση θα είναι:

$$\vec{r} = -4\hat{j} + 5\hat{k} \quad (2.27)$$

και το έργο θα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = -8 + 15 = 7J \quad (2.28)$$