$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \Longleftrightarrow$$

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt \overset{t=0, I=I_0}{\Longleftrightarrow} I = I_0 e^{-Rt/L} \tag{3.125}$$

όπου V_L είναι η στιγμιαία επαγωγική τάση του πηνίου. Η αρχική τιμή του ρεύματος θα είναι $I_0 = V_E/R$. Η επαγωγική τάση του πηνίου θα είναι: $V_L = IR = = V_E e^{-Rt/L}$.

3.1.15 Ηλεκτρομαγνητικές Ταλαντώσεις

Έστω ένα κύκλωμα που αποτελείται από μια αντίσταση R, ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C. Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα και σε συνδυασμό με τη σχέση για την επαγωγική τάση στο πηνίο και τον ορισμό της χωρητικότητας του πυκνωτή έχουμε:

$$\left[\begin{array}{c} C = \dfrac{Q}{V_C} \\ \\ -IR - V_C - V_L = 0 \\ \\ V_L = -L\dfrac{dI}{dt} \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$-L\frac{d^2Q}{dt^2} - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \Longleftrightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0 \tag{3.126}$$

Στην περίπτωση αυτή το ρόλο της απόσβεσης των μηχανικών ταλαντώσεων παίζει η αντίσταση του κυκλώματος. Η εξίσωση αυτή είναι όμοια στη μορφή με την αντίστοιχη της 2.80 για τις μηχανικές ταλαντώσεις. Επομένως και η λύση τους θα είναι η ίδια. Θέτοντας $L \to m$, $R \to b$ και $1/C \to D$ και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του χαρακτηριστικού πολυώνυμου, παίρνουμε:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} \tag{3.127}$$

Θέτοντας $\gamma = \frac{R}{2L}$ και $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ έχουμε ότι η λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{3.128}$$

Διερεύνηση:

(1) $\gamma^2 > \omega_0^2$ (περίπτωση ισχυρής απόσβεσης). Σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις της ταλάντωσης θα είναι:

$$Q(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{pt} + Be^{-pt}) \tag{3.129}$$

όπου οι σταθερές A, B καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

(2) $\gamma^2 = \omega_0^2$ (περίπτωση κρίσιμης απόσβεσης). Σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις της ταλάντωσης θα είναι:

$$Q(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \tag{3.130}$$

όπου οι σταθερές A, B καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

(3) $\gamma^2 < \omega_0^2$ (περίπτωση ασθενούς απόσβεσης). Σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις της ταλάντωσης θα είναι:

$$Q(t) = Ae^{-\gamma t}cos(\omega_1 t + \phi) \tag{3.131}$$

όπου οι σταθερές A, ϕ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος και $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

3.1.16 Εναλλασσόμενα Ρεύματα

Ορίζουμε σαν **εναλλασσόμενο ρεύμα το ρεύμα που σε τακτά χρονικά διαστήματα αλλάζει πολικότητα**. Αν στο κύκλωμα της προηγούμενης παραγράφου προσθέσουμε και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης, τότε θα έχουμε εξαναγκασμένες ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις. Το κύκλωμα εξαναγκάζεται να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση εξ' αιτίας της εξωτερικής αρμονικής τάσης με τη συχνότητα της τάσης.

Κυκλώματα εναλλασσομένων ρευμάτων σε σειρά

Έστω ένα κύκλωμα που αποτελείται από μια αντίσταση R, ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L, μια πηγή που παράγει αρμονική τάση της μορφής $V_0 cos\omega t$ και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C. Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα και σε συνδυασμό με τη σχέση για την επαγωγική τάση στο πηνίο και τον ορισμό της χωρητικότητας του πυκνωτή έχουμε:

$$\left[\begin{array}{c} C = \dfrac{Q}{V_C} \\ \\ -IR - V_C - V_L = V_0 \cos\omega t \\ \\ V_L = -L\dfrac{dI}{dt} \end{array}\right] \Longleftrightarrow L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \omega V_0 \sin\omega t$$

Η εξίσωση αυτή θυμίζει τις εξαναγκασμένες μηχανικές ταλαντώσεις. Στη μόνιμη κατάσταση η περίοδος των ταλαντώσεων είναι ίση με την περίοδο της εξωτερικής τάσης. Η ένταση του ρεύματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t - a) \tag{3.132}$$

όπου $\tan a = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$. Το πλάτος της έντασης θα είναι μέγιστο όταν

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Longleftrightarrow \omega = \sqrt{1/LC} = \omega_0 \tag{3.133}$$

Τότε εμφανίζεται **συντονισμός ενέργειας**. Η ένταση βρίσκεται σε φάση με την εφαρμοζόμενη τάση. Κατά το συντονισμό ενέργειας η μεταφορά ενέργειας από την εφαρμοζόμενη τάση προς το κύκλωμα είναι μέγιστη. Η παράσταση $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}$ ονομάζεται **εμπέδηση** του κυκλώματος και είναι ουσιαστικά η αντίστασή του στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και εφαρμοζόμενης τάσης δίνεται από τη σχέση:

$$\tan a = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \tag{3.134}$$